

【問 1】 指数関数 e^x 、三角関数 $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開せよ。

【問 2】 問 1 の結果を用いてオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成立することを確認せよ。

【問 3】 微分方程式 $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = A\varphi(x)$ (A は実定数) の一般解を、 $A > 0$, $A = 0$, $A < 0$ のそれぞれの場合について求めよ。

【問 4】 二次元平面のデカルト座標と極座標の関係は、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と表される。

(1) $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ を r と θ を用いて表せ。

(2) $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ を r と θ を用いて表せ。

(3) r 方向の速度 v_r および加速度 a_r 、 θ 方向の速度 v_θ および加速度 a_θ を r と θ で表せ。

【問 5】 力学の法則は、作用積分 $I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$ の変分 δI がゼロになるものとして表すことができる。この条件からラグランジュの運動方程式を導いてみよ。

【問 6】 点 (x_1, y_1) と点 (x_2, y_2) を結ぶ曲線 $y = y(x)$ に沿った長さは、 $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ で表せることを示せ。長さ S の積分値を最小にする曲線は、非積分関数を $F(y, y')$ として変分条件 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ を満足する。この曲線が直線であることを示せ。

【問 7】 二次元平面におけるデカルト座標と極座標の関係は $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ で表せる。

(1) ポテンシャルエネルギーが $U(r, \theta)$ で与えられたとき、2次元極座標 (r, θ) におけるラグランジアンを書け。

(2) 上で求めたラグランジアンから2次元極座標の運動方程式を導け。

【問 8】 $f(x) = (x_0 + x)^n$ を二項展開し、 $f(x)$ の $x = 0$ の回りのテイラー展開と比較せよ。 n は正の整数とする。

【問 9】 曲線 $y = x^2$ を考える。 $f(x, y) = x^2 - y$ とすると、 $\nabla f(x, y)$ が $y = x^2$ の接線と直交することを確認せよ。

【問 10】 水平に x 軸、鉛直下向きに y 軸をとった 2 次元平面内における質量 m 、糸の長さ l の振り子の運動を考える。

- (1) $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ を l と振り子の振れ角 θ を用いて表せ
- (2) ラグランジアンを書き下し、運動方程式を導け
- (3) 得られた運動方程式を解き、振り子の角振動数を求めよ。但し、振り子の振幅は十分に小さいものとする。

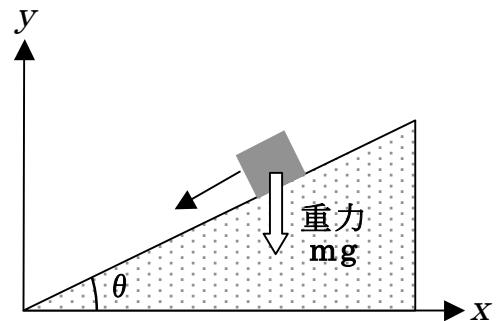
【問 11】 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x^2$ の一般解を定数変化法を用いて求めよ。

【問 12】 右図の様に斜面を落下する物体の運動を考える。

- (1) ラグランジュの未定乗数 λ を導入し、拘束条件を含むラグランジアン

$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y, \lambda)$ を書け。

- (2) オイラー・ラグランジュの方程式を求めよ。
- (3) 上で求めた式から λ を消去して、 x 成分の運動方程式を求めよ。



【問 13】 バネ定数 k のバネに繋がった質量 m の物体に振動外力 $mF_0 e^{i\omega t}$ が作用している。バネの伸びを x とすると運動方程式は式(13-1)で与えられる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x = F_0 e^{i\omega t} \dots\dots (13-1), \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

- (1) $\omega \neq \Omega$ の場合に(13-1)式の一般解は(13-2)で与えられることを確かめよ。

$$x = A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t} - F_0 \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \Omega^2} \dots\dots (13-2) \quad (A, B \text{ は複素定数})$$

- (2) 次に $\omega = \Omega$ の場合を考える。その為に(13-2)式で A を $A + F_0 \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$ と置きなおすと、

(13-2)式は、

$$x = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} - F_0 \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \Omega^2} \dots\dots (13-3)$$

となる。ここで $\omega \rightarrow \Omega$ の極限をとることにより、 $\omega = \Omega$ の場合の一般解を求めよ。

【問 14】 質量 m の質点がバネ定数 k のバネに繋がれている。平衡点からのずれを x として以下の問に答えよ。但し、質点は一次元上を運動するものとし、運動量を p で表せ。

- (1) ラグランジアン及びハミルトニアンを求めよ。
- (2) 運動方程式を解くことにより、質点の運動の角振動数 ω を k と m で表せ。
- (3) 質点の運動を位相空間 (x, p) 上で図示せよ。

【問 15】 作用変数 $J = \oint pdq$ の次元を求めよ。それは、どのような物理量や物理定数と同じ次元か？

【問 16】 次の積分の値を求めよ。但し、 m, n は正の整数とする。

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

【問 17】 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + ax^2 + bx + c$ の一般解を求めよ。

【問 18】

- (1) 三次元極座標系 (r, θ, φ) で、スカラー関数 ϕ およびベクトル関数 $\mathbf{A}$ に対する勾配 (gradient) と発散 (divergence) をそれぞれ書き下せ。
- (2) $\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi, t) = \text{div}(\text{grad} \psi(r, \theta, \varphi, t))$ と表されることを利用して、ポテンシャル $V(r, \theta, \varphi)$ の下での 3 次元極座標系におけるシュレーディンガー方程式を書き下せ。但し、 ∇^2 はラプラシアンを ψ は波動関数を表す。

【問 19】

- (1) 水面上を伝播する波の分散関係式は、波長 $(2\pi/k)$ が水深に比べ十分に小さければ、

$$\omega = \sqrt{gk}$$

で与えられる。この波の群速度を求めよ。

- (2) 観測点から距離 L 離れた地点で時刻 t_0 に様々な周波数の波が同時に励起されたとする。このとき、周波数が ω の波が観測点に到達する時刻 $t(\omega)$ を求めよ。

- (3) 下図はハワイに打ち寄せる波（うねり）の周波数（縦軸）と到達時刻（横軸）との関係を示したものである。(2)で求めた関係式を使って、この波がどこで発生したのか推定せよ（図の単位系に注意：時間(横軸)の単位は[day]。周波数 f (縦軸)の単位は[mc/s (milli-cycle/second)]=1000 秒間あたりの振動回数。 f (mc/s) と ω (rad/s) の関係は $\omega = (2\pi/10^3) \times f$ で与えられる）。

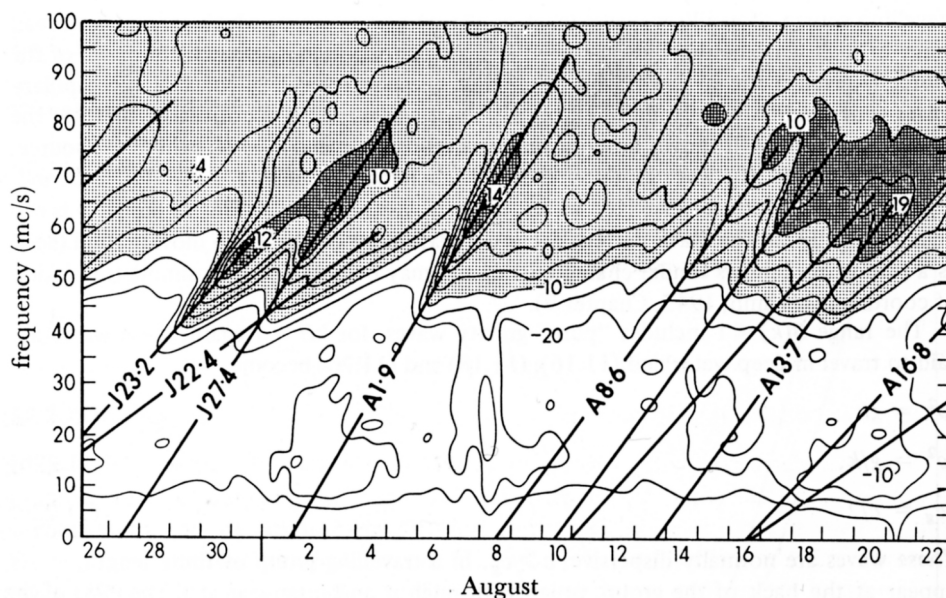


Fig. 11.4. Contours of wave energy density on a frequency–time plot for one month in Honolulu. The ridges represent arrivals of dispersed wave groups associated with storms (cf. 11.24) and are labelled according to the storm time (i.e., J27.4 means July 27, 9.6 hr G.M.T.). The ticks on the time axis denote midnight G.M.T. (From Snodgrass et al., 1966.)

- 【問 20】 対称行列（実エルミート行列に対応する） $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め、固有値が実数であること、及び固有ベクトルが互いに直交することを確認せよ。

- 【問 21】 交換関係 $[x, p] = [E, t] = i\hbar$ が成り立つことを確認せよ。なお、角括弧は交換子を表し、 $[A, B] = AB - BA$ と定義される。

- 【問 22】 一次元定常のシュレディンガー方程式は、

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x)$$

と表される。 $V(x) = V_0$ の時、波動関数 $\varphi(x)$ の一般解を求めよ。

【問 23】 シュレディンガー方程式（ポテンシャルは時間に依存しないとする）

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) \quad (23-1)$$

の特解の一つとして、 $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) f(t)$ と積の形に書かれるものを考える。これを (23-1) 式に代入して整理すると、 $f(t)$ と $u(\vec{r})$ に対する微分方程式が以下の様になることを示せ。

$$\frac{df(t)}{dt} = -i \frac{E}{\hbar} f(t) \cdots (23-2), \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u(\vec{r}) + V(\vec{r}) u(\vec{r}) = E u(\vec{r}) \cdots (23-3)$$

ここで E は分離定数と呼ばれ、今の場合はエネルギーに対応する。(23-2) 式を解いて、特

解の一つが $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ で与えられることを確かめよ。

【問 24】 重力場中を鉛直方向に運動する粒子を考える。シュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + mgz \psi(z, t)$$

となる (z 軸は鉛直上向き)。粒子の運動量 p の期待値 $\langle p \rangle$ は、

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(z', t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(z', t)}{\partial z'} dz'$$

で与えられる。このとき $\langle p \rangle$ に対して古典力学の運動方程式、

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -mg$$

が成立することを確認せよ。これをエーレンファストの定理と呼ぶ。