2011年度　地球惑星物理学基礎演習Ｉ 期末試験

【問題 1】

（1）ラプラス変換を用いて、次の微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx}+ay(x)=e^{-bx}+\cos cx \qquad (\mathrm{a}\neq \mathrm{b})$$

の一般解を求めよ。ただし、関数 $y(x)$ のラプラス変換は次式で定義される。

$$Y(s)\equiv L\{y(x)\}\equiv\int_0^{\infty}y(x)e^{-sx}dx \qquad (s>0)$$

(2)（2-1）$-\pi\leq x\leq\pi$ で定義される関数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\left(x^2-\alpha^2\right)$ をフーリエ級数に展開せよ。ただし、α は任意の定数である。

（2-2）（2-1）の結果を利用して、$x\left(x^2-\pi^2\right)=12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin nx}{n^3}$ を証明せよ。

2011 年度　地球惑星物理学基礎演習Ⅰ 期末試験

【問題 2】 $x=0$ と $x=L$ にそびえる剛体壁の間を x 軸上に沿って質量 m の粒子が運動している。

(1) 粒子は剛体壁で交互に反射されて x 軸上を周期的に往復運動する。粒子の運動量を p として、このとき位相空間 (x,p) 上における粒子の運動の軌跡を描け。

(2) この粒子の作用積分 $J=\oint p\,dx$ （一周期にわたる積分）をエネルギー E の関数として求めよ。

(3) 作用積分 J と周期 T との間に一般に成立する関係式を記せ（導出は不要）。この関係式を使って粒子の往復運動の周期をエネルギー E の関数として求めよ。さらに、その結果が実際に粒子の往復周期になっていることを示せ。

(4) 作用積分 J は系のパラメータがゆっくり変化するとき不変に保たれる（断熱不変量）。剛体壁の間の距離を L から $L+\delta L$ にゆっくり僅かに変化させたとき、粒子の運動量が p から $p+\delta p$ に変化したとする。このとき δL と δp の間に成り立つ関係を求めよ（二次以上の微少量は無視する）。

以下の問いでは固定壁は再び $x=0$ と $x=L$ にあってその間の距離は一定とする。

(5) 前期量子論によれば、粒子の運動は以下のボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を満たすものだけが許される。

$$J=\oint p\,dx = nh \quad (n=0,1,2,.... \text{、} h \text{はプランク定数})$$

このとき粒子が持ちうるエネルギー E を n の関数として求めよ。

(6) 次に粒子の運動を量子力学により取り扱う。エネルギー固有値 E に対応する波動関数の固有関数 φ は、次の（時間に依らない）シュレディンガー方程式に従う。

$$\hat{H}\varphi = E\varphi$$

ここで $\hat{H}$ は微分演算子で、古典力学的なハミルトニアン $H(p,x)$ から対応規則

$$p \to -i\hbar\frac{d}{dx} \; (\hbar = \frac{h}{2\pi}\,, h \text{はプランク定数})$$

の書き換えに従って得られるものである。これから区間 $0<x<L$ において波動関数 $\varphi(x)$ が従うべきシュレディンガー方程式を求めよ。また波動関数 $\varphi(x)$ の $x=0$ と $x=L$ における境界条件を記せ。

(7) 前問のシュレディンガー方程式を境界条件の下で解くことにより、エネルギー固有値 E と対応する固有関数 $\varphi(x)$ を求めよ。求めたエネルギー固有値が小問(5)の解と一致することを示せ。

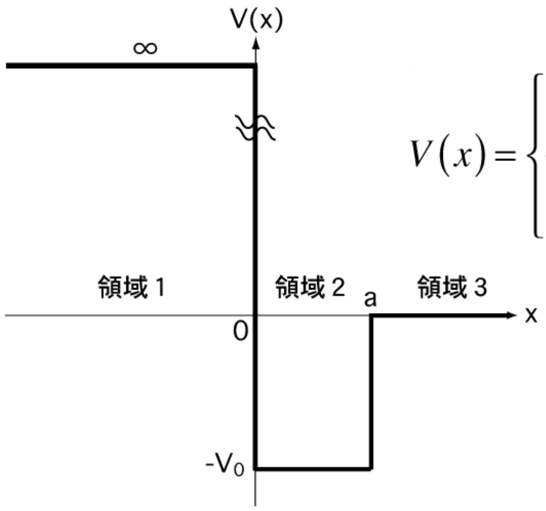
2011 年度　地球惑星物理学基礎演習Ⅰ 期末試験

【問題３】

図のような１次元ポテンシャル$V(x)$内に質量mの電子が束縛されている。この場合、定常状態における電子エネルギーE、および波動関数$\psi(x)$は、次のシュレディンガー方程式の固有値、固有関数として与えられる。

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

この時の電子の運動について以下の問いに答えよ。ただし、$\hbar=h/2\pi$（hはプランク定数）とする。



$$V(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\ -V_0 & (0<x<a)\quad (V_0>0)\\ 0 & (a<x)\end{cases}$$

（１）領域２と領域３におけるシュレディンガー方程式を書け。

（２） $x=0,\ x=a,\ x\to\infty$での境界条件を書け。

（３）（２）の$x=0,\ x\to\infty$での境界条件を満たす（１）の一般解を書け。ただし、$-V_o<E<0$とする。

（４）少なくとも１個の束縛状態が存在するためのV_oの条件を求めよ。

2011 年度　地球惑星物理学基礎演習Ⅰ 期末試験

【問題 4】一次元空間のポテンシャル

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{\hbar^2 a}{2m}\delta(x) & -\infty<x<L \\ \infty & x\geq L>0\end{cases}$$

における質量 m の粒子のポテンシャル問題を考える。ここで $\delta(x)$ はデルタ関数、$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ はプランク定数、a は実数の定数である。

(1) $-\infty<x<L$ の領域で有限のエネルギー E を持つ粒子の波動関数 $\varphi(x)$ が従うべきシュレディンガー方程式を書き下せ。

(2) $-\infty<x<0$ を領域 1、$0<x<L$ を領域 2 と呼び、各領域の波動関数を $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ と記すことにする。$x=0$ において $\varphi_1(x)$ と $\varphi_2(x)$ が満たすべき境界条件と、$x=L$ において $\varphi_2(x)$ が満たすべき境界条件を書き下せ。

(3) エネルギー E が正の場合 $(E>0)$、領域 1, 2 の波動関数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ の一般解を（境界条件を考慮せず）適当な未定係数を含んだ形で求めよ。一般解は三角関数ではなく指数関数を用いて表すこと。

(4) $x=-\infty$ から x が正の方向に向かってエネルギー $E(>0)$ を持つ粒子の平面波を入射させる。入射波の振幅を 1 として、領域 1, 2 における境界条件を満足する波動関数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ の解を求めよ。

(5) $x=0$ における波動関数の確率密度が最小、最大になるときのエネルギー E をそれぞれ求めよ。具体的な解の値を求めるのが難しければグラフを使って説明すること。