

【問 1】 $f(x) = (x_0 + x)^n$ を二項展開し、 $f(x)$ の $x = 0$ の回りのテーラー展開と比較せよ。 n は正の整数とする。

【問 2】 指数関数 e^x 、三角関数 $\cos x$, $\sin x$ を $x = 0$ の周りでテイラー展開せよ。

【問 3】 問 2 の結果を用いてオイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が成立することを確認せよ。

【問 4】 ガウス平面上で適当な複素数 A, B に対して A^* (複素共役), iA , AB , $\frac{A}{B}$ がどのような位置関係にあるか図示せよ。

【問 5】 オイラーの公式を使って、以下の三角関数の加法定理を確認せよ。

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

【問 6】 $f(x)$, $g(x)$ を任意の関数として、 $u(x, t) = f(x - ct)$, $v(x, t) = g(x + ct)$ (c は定数) が、それぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial x}$$

を満たすことを示せ。この偏微分方程式は移流方程式と呼ばれる。

【問 7】 問 6 と同様に、 $w(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ が、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

を満たすことを示せ。この偏微分方程式は波動方程式と呼ばれる。

【問 8】 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2}$$

が成立することを示せ。

【問 9】 x, y, z の間に関数関係があるとき、すなわち、 $f(x, y, z) = 0$ のとき、

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1 \quad (+1 \text{ ではないことに注意})$$

が成立することを示せ。

【問 10】 曲線 $y = x^2$ を考える。 $f(x, y) = x^2 - y$ とすると、 $\nabla f(x, y)$ が $y = x^2$ の接線と直交することを確認せよ。

【問 11】インジウム箔の一定の遅い中性子フラックスによる活性化において、放射性原子の数 N は次の式に従う。

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N_s - \lambda N$$

ここで N_s は飽和した後での一定の原子数である。 $N(0) = 0$ の初期条件の元で $N(t)$ を求めよ。また横軸に時間 t をとり、 $N(t)$ の時間変化を示せ。

【問 12】 微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + ax^2 + bx + c$ の一般解を定数変化法を用いて求めよ。

【問 13】 微分方程式 $\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = A\varphi(x)$ (A は実定数) の一般解を、 $A > 0$, $A = 0$, $A < 0$ のそれぞれの場合について求めよ。

【問 14】 次の二つの非斉次微分方程式の解を求めよ。

(1) $y'' + 3y' + 2y = e^x$

(2) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

【問 15】 次の非斉次微分方程式の一般解を求めよ。

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + 2e^x + 2x^2$$

【問 16】 対称行列（実エルミート行列に対応する） $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求め、固有値が実数であること、及び固有ベクトルが互いに直交することを確認せよ。

【問 17】 二次元平面のデカルト座標と極座標の関係は、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と表される。

(1) $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ を r と θ を用いて表せ。

(2) $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$, $a_y = \frac{d^2y}{dt^2}$ を r と θ を用いて表せ。

(3) r 方向の速度 v_r および加速度 a_r 、 θ 方向の速度 v_θ および加速度 a_θ を r と θ で表せ。

【問 18】 バネ定数 k のバネに繋がった質量 m の物体に振動外力 $mF_0 e^{i\omega t}$ が作用している。バネの伸びを x とすると運動方程式は式(1)で与えられる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \Omega^2 x = F_0 e^{i\omega t} \dots\dots (1), \quad \Omega^2 = \frac{k}{m}$$

(1) $\omega \neq \Omega$ の場合に(1)式の一般解は(2)式で与えられることを示せ。

$$x = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} - F_0 \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - \Omega^2} \dots\dots (2) \quad (A, B \text{ は複素定数})$$

(2) 次に $\omega = \Omega$ の場合を考える。その為に(2)式の A を $A + F_0 \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$ と置きなおすと

$$x = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t} - F_0 \frac{e^{i\omega t} - e^{i\Omega t}}{\omega^2 - \Omega^2} \dots\dots (3)$$

となる。ここで $\omega \rightarrow \Omega$ の極限をとることにより、 $\omega = \Omega$ の場合の一般解を求めよ。

【問 19】 質量 m の物体がバネ定数 $k \equiv m\omega^2$ のバネにつながれ静止している ($x=0, \dot{x}=0$)。

- (1) この物体に時刻 $t=0$ から $t=\varepsilon$ の間に大きさ $F=1/\varepsilon$ の一定の外力が作用したとする。摩擦等は無視できるとして、 $0 \leq t \leq \varepsilon$, $t > \varepsilon$ の区間で物体が従う微分方程式を書き下せ。
- (2) 前問で $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考える (無限小時間に無限大の外力!)。このとき外力が作用した直後の物体の位置 $x(+0)$ と速度 $\dot{x}(+0)$ はどうなるか。(ヒント: 微分方程式を $t=0 \sim \varepsilon$ の範囲で積分したものの極限を考えよ)。
- (3) 前問で得た初期条件 $x(+0), \dot{x}(+0)$ で微分方程式を解き、外力が働いた後の物体の運動を求めよ。

【問 20】 力学の法則は、作用積分 $I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$ の変分 δI がゼロになるものとして表すことができる。この条件からラグランジュの運動方程式を導いてみよ。

【問 21】 点 (x_1, y_1) と点 (x_2, y_2) を結ぶ曲線 $y = y(x)$ に沿った長さは、 $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ で表せることを示せ。長さ S の積分値を最小にする曲線は、非積分関数を $F(y, y')$ として変分条件

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ を満足する。この曲線が直線であることを示せ。}$$

【問 22】 二次元平面におけるデカルト座標と極座標の関係は $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ で表せる。

- (1) ポテンシャルエネルギーが $U(r, \theta)$ で与えられたとき、2次元極座標 (r, θ) におけるラ

ラグランジアンを書け。

(2) 上で求めたラグランジアンから 2 次元極座標の運動方程式を導け。

【問 23】 水平に x 軸、鉛直下向きに y 軸をとった 2 次元平面内における質量 m 、糸の長さ l の振り子の運動を考える。

(1) $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ を l と振り子の振れ角 θ を用いて表せ

(2) ラグランジアンを書き下し、運動方程式を導け

(3) 得られた運動方程式を解き、振り子の角振動数を求めよ。但し、振り子の振幅は十分に小さいものとする。

【問 24】 平面上を相互作用しながら運動する二つの粒子を考える。粒子 1 と粒子 2 の質量を m_1, m_2 位置座標を $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$ とする。また、相互作用ポテンシャルは $U = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ で与えられるとする。

(1) この系のラグランジアンを書け。

(2) 重心ベクトル $\vec{R} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) / (m_1 + m_2) = (X, Y)$ と相対位置ベクトル $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x, y)$ を用いて、ラグランジアンを書き直せ。

(3) ラグランジュ方程式から (X, Y) と (x, y) に関する運動方程式を求めよ。

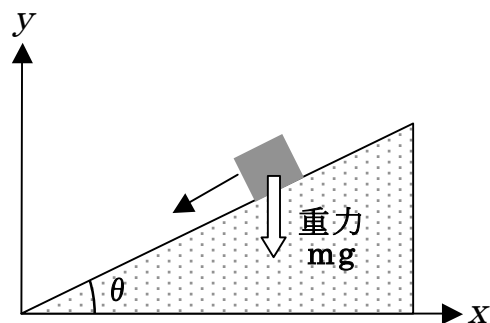
【問 25】 右図の様に斜面を落下する物体の運動を考える。

(1) ラグランジュの未定乗数 λ を導入し、拘束条件を含むラグランジアン

$L(\dot{x}, \dot{y}, x, y, \lambda)$ を書け。

(2) オイラー・ラグランジュの方程式を求めよ。

(3) 上で求めた式から λ を消去して、 x 成分の運動方程式を求めよ。



【問 26】 質量 m の質点がバネ定数 k のバネに繋がれている。平衡点からのずれを x として以下の問に答えよ。但し、質点は一次元上を運動するものとし、運動量を p で表せ。

(1) ラグランジアン及びハミルトニアンを求めよ。

(2) 運動方程式を解くことにより、質点の運動の角振動数 ω を k と m で表せ。

(3) 質点の運動を位相空間 (x, p) 上で図示せよ。

(4) 作用変数 $J = \oint p dq$ を求めよ。作用変数の次元はなにか、それはどのような物理量や物理定数と同じ次元か？

【問題 27】

- (1) (q, p) から (Q, P) への一次変換 $Q = \alpha q + \beta p$, $P = \gamma q + \delta p$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数) を考える。独立変数を (Q, q) に選んだとして、この変換を $p = \alpha' q + \beta' Q$, $P = \gamma' q + \delta' Q$ の形に書き直せ。もしこの変換が正準変換ならば、母関数 $W(q, Q)$ を使って、 $p = \partial W(q, Q) / \partial q$ (1), $P = -\partial W(q, Q) / \partial Q$ (2) と書けるはずである。式(1)から $W(q, Q)$ がどのような形をとるべきか？ さらに、それが式(2)を満たすことから、一次変換が正準変換になるための条件を定めると共に、そのときの母関数 $W(q, Q)$ を求めよ。
- (2) 一次変換 $Q = \alpha q + \beta p$, $P = \gamma q + \delta p$ のポアソン括弧を計算することにより、一次変換が正準変換になるための条件を求めよ。

【問 28】 次の積分の値を求めよ。但し、 m, n は正の整数とする。

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad \int_0^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

【問 29】 $0 \leq x \leq L$ の時、次の式が成り立つことを証明せよ。

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (1)$$

(1)式を使って、次の恒等式を導き出せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (3)$$

【問 30】

- (1) 関数 $f(t) = e^{at}$ のラプラス変換 $F(s) = L\{f(t)\}$ を求めよ。
- (2) 次のラプラス変換 $F(s)$ の逆変換 $f(t)$ を求めよ。

$$(2-1) \quad F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad \text{ここで } a \neq b \text{ とする。}$$

$$(2-2) \quad F(s) = \frac{2s^2 - 4s}{(2s+1)(s^2+1)}$$

【問 31】

- (1) 三次元極座標系 (r, θ, φ) で、スカラー関数 ϕ およびベクトル関数 $\mathbf{A}$ に対する勾配 (gradient) と発散(divergence)をそれぞれ書き下せ。
- (2) $\nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi, t) = \text{div}(\text{grad} \psi(r, \theta, \varphi, t))$ と表されることを利用して、ポテンシャル $V(r, \theta, \varphi)$ の下での 3 次元極座標系におけるシュレーディンガー方程式を書き下せ。但し、 ∇^2 はラプラシアンを ψ は波動関数を表す。

【問 32】

- (1) 水面上を伝播する波の分散関係式は、波長 $(2\pi/k)$ が水深に比べ十分に小さければ、

$$\omega = \sqrt{gk}$$

で与えられる。この波の群速度を求めよ。

- (2) 観測点から距離 L 離れた地点で時刻 t_0 に様々な周波数の波が同時に励起されたとする。このとき、周波数が ω の波が観測点に到達する時刻 $t(\omega)$ を求めよ。

- (3) 下図はハワイに打ち寄せる波（うねり）の周波数（縦軸）と到達時刻（横軸）との関係を示したものである。(2)で求めた関係式を使って、この波がどこで発生したのか推定せよ（図の単位系に注意：時間(横軸)の単位は[day]。周波数 f (縦軸)の単位は[mc/s (milli-cycle/second)]=1000 秒間あたりの振動回数。 f (mc/s) と ω (rad/s) の関係は $\omega = (2\pi/10^3) \times f$ で与えられる)。

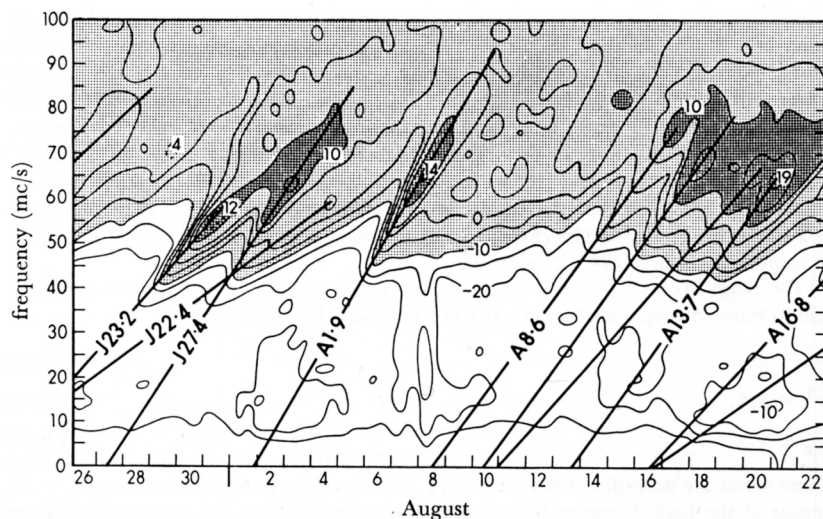


Fig. 11.4. Contours of wave energy density on a frequency-time plot for one month in Honolulu. The ridges represent arrivals of dispersed wave groups associated with storms (cf. 11.24) and are labelled according to the storm time (i.e., J27.4 means July 27, 9.6 hr G.M.T.). The ticks on the time axis denote midnight G.M.T. (From Snodgrass et al., 1966.)

- 【問 33】 半径 R の円周上を外力を受けずに運動する質量 m の粒子を考える。粒子の位置を円の中心からの角度 θ で指定する。

- (1) はじめに粒子の運動を古典力学により取り扱う。角度 θ に共役な運動量 p_θ を求め、粒子の

運動のハミルトニアン $H(p_\theta, \theta)$ を書き下せ。

(2) 粒子の運動の正準方程式を求めよ。

(3) 前期量子論によれば、粒子の運動は以下のボーア・ゾンマーフェルトの量子化条件を満たすものだけが許される。

$$J = \oint pdq = nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \quad h \text{ はプランク定数})$$

ここで (p, q) は正準共役な変数で積分は一周期について行う。このとき粒子が持ちうるエネルギーを n の関数として求めよ。

【問 34】 上の問 33 と同じ問題を量子力学により取り扱う。

(1) 一般にエネルギー固有値 E に対応する波動関数の固有関数 φ は、次の（時間に依らない）シュレディンガー方程式に従う。

$$\hat{H}\varphi = E\varphi$$

ここで $\hat{H}$ は微分演算子であり、古典力学的なハミルトニアン $H(p, q)$ から対応規則

$$p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi}, h \text{ はプランク定数})$$

に従う置き換えによって得られるものである。これから問題の粒子の固有関数 $\varphi(\theta)$ が従うシュレディンガー方程式を具体的に書け。

(2) 前問で求めたシュレディンガー方程式を解いて、エネルギー固有値 E と対応する固有関数 $\varphi(\theta)$ を求めよ。求めたエネルギー固有値が小問 3 の解と一致することを示せ。

【問 35】 交換関係 $[x, p] = [E, t] = i\hbar$ が成り立つことを確かめよ。なお、角括弧は交換子を

表し、 $[A, B] = AB - BA$ と定義される。

【問 36】 一次元定常のシュレディンガー方程式は、

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right\} \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x)$$

と表される。 $V(x) = V_0$ の時、波動関数 $\varphi(x)$ の一般解を求めよ。

【問 37】 シュレディンガー方程式（ポテンシャルは時間に依存しないとする）

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) \quad (1)$$

の特解の一つとして、 $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) f(t)$ と積の形に書かれるものを考える。これを(1)

式に代入して整理すると、 $f(t)$ と $u(\vec{r})$ に対する微分方程式が以下の様になることを示せ。

$$\frac{df(t)}{dt} = -i\frac{E}{\hbar}f(t) \cdots (2), \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 u(\vec{r}) + V(\vec{r})u(\vec{r}) = Eu(\vec{r}) \cdots (3)$$

ここで E は分離定数と呼ばれ、今の場合はエネルギーに対応する。(2)式を解いて、特解

の一つが $\psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ で与えられることを確かめよ。

【問 38】 重力場中を鉛直方向に運動する粒子を考える。シュレディンガー方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} + mgz\psi(z, t)$$

となる(z 軸は鉛直上向き)。粒子の運動量 p の期待値 $\langle p \rangle$ は、

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(z', t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi(z', t)}{\partial z'} dz'$$

で与えられる。このとき $\langle p \rangle$ に対して古典力学の運動方程式、

$$\frac{d\langle p \rangle}{dt} = -mg$$

が成立することを確かめよ。これをエーレンファストの定理と呼ぶ。